Двоичная арифметика

n-разрядный позиционный двоичный код (далее везде $n = 8$):

$$a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Преобразование из двоичной в десятичную систему счисления

$$y_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$$

Пример: $x = 01100100_2$

$$y_{10} = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 = 4 + 32 + 64 = 100_{10}$$

Преобразование из десятичной в двоичную систему счисления

Для i от 0 до тех пор, пока $x_i \neq 0$:

1. $y_i = x_i \% 2$,
   где y_i — i-й разряд двоичного числа,
   $a \% b$ — остаток от деления a на b,
   x_i — значение на предыдущей итерации ($x_0 = x$)
2. $x_{i+1} = x_i / 2$
3. старшие разряды заполнить нулями до n разрядов

Пример: $x = 100_{10} \Rightarrow x_0 = 100_{10}$

$$\begin{array}{llll} i = 0, & y_0 = 100_{10} \% 2 = 0_2, & x_1 = 100_{10} / 2 = 50_{10} \\ i = 1, & y_1 = 50_{10} \% 2 = 0_2, & x_2 = 50_{10} / 2 = 25_{10} \\ i = 2, & y_2 = 25_{10} \% 2 = 1_2, & x_3 = 25_{10} / 2 = 12_{10} \\ i = 3, & y_3 = 12_{10} \% 2 = 0_2, & x_4 = 12_{10} / 2 = 6_{10} \\ i = 4, & y_4 = 6_{10} \% 2 = 0_2, & x_5 = 6_{10} / 2 = 3_{10} \\ i = 5, & y_5 = 3_{10} \% 2 = 1_2, & x_6 = 3_{10} / 2 = 1_{10} \\ i = 6, & y_6 = 1_{10} \% 2 = 1_2, & x_7 = 1_{10} / 2 = 0_{10} \end{array}$$

$y = 01100100_2$

Прямой код

Для представления целых чисел без знака. Диапазон $0 \dots 2^n - 1$ ($0 \dots 255$). В n разрядах двоичный код числа.

Обратный код

Для представления целых чисел со знаком. Диапазон $-(2^{n-1}-1)\ldots+(2^{n-1}-1)$ $(-127\ldots-1,-0,+0,+1\ldots+127)$. Старший разряд $(n-1)$ — знаковый: 0 для положительных, 1 — для отрицательных чисел.

$x>0$: в $n-1$ младших разрядах прямой двоичный код, в старшем разряде 0.

$x<0$: инверсия всех разрядов числа $-x$

Примеры: $+100_{10}=\boxed{0}1100100_2$, $-100_{10}=\boxed{1}0011011_2$, $+50_{10}=\boxed{0}0110010_2$, $-50_{10}=\boxed{1}1001101_2$

Недостаток — неоднозначное представление нуля. $+0=\boxed{0}0000000_2$, $-0=\boxed{1}1111111_2$.

Дополнительный код

Для представления целых чисел со знаком. Диапазон $-2^{n-1}\ldots+(2^{n-1}-1)$ $(-128\ldots-1,0,+1\ldots+127)$. Старший разряд $(n-1)$ — знаковый: 0 для положительных, 1 — для отрицательных чисел.

$x\geqslant 0$: в $n-1$ младших разрядах прямой двоичный код, в старшем разряде 0.

$x<0$: на 1 больше обратного кода

Примеры: $+100_{10}=\boxed{0}1100100_2$, $-100_{10}=10011011_2+1=\boxed{1}0011100_2$, $+50_{10}=\boxed{0}0110010_2$, $-50_{10}=11001101_2+1=\boxed{1}1001110_2$

Достоинство — однозначное представление нуля. $+0=\boxed{0}0000000_2$, $-0=11111111_2+1=\boxed{0}0000000_2$.

Сложение беззнаковых целых чисел

Без переполнения

Пример: $100_{10}+100_{10}=200_{10}\in[0,255]$

C	76543210
	01100100
	01100100
0	11001000

Перенос (Carry) из старшего (седьмого) разряда в восьмой $C_{7\to 8}=C=0$

С переполнением

Пример: $200_{10}+100_{10}=300_{10}\notin[0,255]$

C	76543210
	11001000
	01100100
1	00101100

$C=1$

Сложение целых чисел со знаком

Положительный результат без переполнения

Пример: $+50_{10} + (+50_{10}) = +100_{10} \in [-128, +127]$

C	N	6543210
	0	0110010
	0	0110010
0	0	1100100

N (negative) — старший (знаковый) разряд.

$C_{6\to7} = 0, C_{7\to8} = 0$

Положительный результат с переполнением

Пример: $+100_{10} + (+50_{10}) = +150_{10} \notin [-128, +127]$

C	N	6543210
	0	1100100
	0	0110010
0	1	0010110

$C_{6\to7} = 1, C_{7\to8} = 0$

Отрицательный результат без переполнения

Пример: $-50_{10} + (-50_{10}) = -100_{10} \in [-128, +127]$

C	N	6543210
	1	1001110
	1	1001110
1	1	0011100

$C_{6\to7} = 1, C_{7\to8} = 1$

Отрицательный результат с переполнением

Пример: $-50_{10} + (-100_{10}) = -150_{10} \notin [-128, +127]$

C	N	6543210
	1	0011100
	1	1001110
1	0	1101010

$C_{6\to7} = 0, C_{7\to8} = 1$

Флаги арифметических операций

C (carry) — для беззнаковых чисел переполнение при сложении; дополнительный (n-й) разряд результата; знак результата вычитания (0/1: −/+). Перенос из старшего разряда.

N (negative) — знак результата для чисел со знаком (0/1: +/− без переполнения или −/+ при переполнении). Старший разряд результата.

V (overflow) — переполнение при сложении чисел со знаком. $C_{6\to7} \oplus C_{7\to8}$ или $a_7 \cdot b_7 \cdot \overline{r_7} + \overline{a_7} \cdot \overline{b_7} \cdot r_7$, где a и b — слагаемые, r — результат.

S (sign) — знак результата для чисел со знаком независимо от переполнения (0/1: +/−). $N \oplus V$

Вычитание целых беззнаковых чисел

$A - B = A + (-B)$

Положительный результат

Пример: $150_{10} - 50_{10} = 100_{10} > 0$. Результат корректный, т. к. неотрицательный. Переполнения никогда не будет, т. к. $255(max) - 0(min) = 255 \in [0, 255]$

C	76543210
	10010110
	11001110
1	01100100

$C = 1$

Отрицательный результат

Пример: $50_{10} - 100_{10} = -50_{10} < 0$. Результат некорректный, т. к. отрицательный.

C	76543210
	00110010
	10011100
0	11001110

$C = 0$